

## 高調波位相同期2重モード発振器の 同期特性とFM受信機への応用

梅田博之\* 竹内正義\*

### Mutual Phase-Locking Properties of Double-Mode Oscillator with Harmonic Oscillation and Applications to FM Receiver

Hiroyuki UMEDA and Masayoshi TAKEUCHI

(Received Aug. 30, 1990)

We discuss characterization of the mutual phase-locking mode of operation in the double-mode oscillator and introduce FM receiver which incorporates the maximum locking bandwidth, pull-in range, equivalent noise-bandwidth, and a third order distortion of demodulated signal. An approximate analytical solution for FM detecting action is derived from the nonlinear locking equation. This solution is then compared with exact numerical calculation and with experimental results. The results indicate that excellent performance may be expected of such a receiver.

#### 1. ま え が き

位相同期発振器を局部発振器として用い、リニアミキサーから構成されるFM受信機を提案する。FM受信機の検波特性、高調波歪、雑音帯域幅<sup>(1),(3)</sup>の考え方をより発展させ、検波出力が同期帯域幅にどのように依存するか、相互位相同期を有する2重モード同期発振器<sup>(4)</sup>を用いたFM受信機が従来の単一モード同期発振器に比べいかに優れているかを研究目的としている。

2重モード同期発振器<sup>(1),(2)</sup>は基本波と第3高調波(あるいは第2高調波)の同期発振モードを用いるもので、2つの周波数間でエネルギーの授受が生じ<sup>(4)</sup>、不完全積分型位相同期ループの2階の位相同期方程式と同様の式として記述される<sup>(4)</sup>。

本文は、先づFM検波の原理について述べ、位相同期特性の同期帯域幅が重要な役割を有することを述べる。ついで同期安定性と位相引込特性の基本式を示し、FM受信機を評価するときに有用となる動作同期帯域幅を定義する。さらに等価雑音帯域幅を導入し、FM受信機の雑音特性を記述する。

FM信号のベースバンド幅(あるいは変調速度)は位相同期発振器の動作同期帯域幅で決定され、大きな同期帯域幅をもつ注入同期発振器が要求される<sup>(1),(3)</sup>。一方外部付加雑音に対し発振器は狭帯

域同調フィルタとして働き、位相ゆらぎに対し雑音軽減効果をもつが、その効果は発振器の外部  $Q$  が高いほど大きい<sup>1)</sup>。この相反する 2 つの要求を満足する新しい位相同期 2 重モード発振 FM 受信機であり、従来の FM 受信機に比べ、回路構成が容易であり、しかも出力雑音の軽減、検波出力の低スペクトル歪み、速い位相応答など FM 検波特性に優れている。これらの諸特性は簡単なモデル実験を行い、最も基本的検波特性において確認している。

## 2. 位相同期発振器を用いた FM 検波の原理

位相同期発振器による FM 受信機の基本的動作を図 1 の回路を用いて説明する。周波数変調信号、 $\dot{\theta}_s = d\theta_s/dt$  をもつ FM 変調波  $i_s$  は

$$i_s = I_s \cos(\omega_s t + \int_0^t \dot{\theta}_s(s) ds) \quad (1)$$

である。ここに振幅  $I_s$  は時間的に一定である。位相同期発振器への入力信号  $i_s$  に対し、そのときの出力信号は

$$i_1 = I_1 \cos(\omega_o t + \int_0^t \dot{\theta}_s(s) ds - \varphi(t)) \quad (2)$$

と書く。ただし  $\varphi(t)$  はつぎの位相同期方程式に従う<sup>1)</sup>。

$$\varphi = \dot{\theta}_s + \omega_s - \omega_o - B \sin \varphi \quad (3)$$

ここに  $\omega_o$  は発振器の自由発振周波数、 $B$  はその同期帯域幅であり<sup>1)</sup>、

$$B = \frac{I_s}{I_1 K(\omega_o)} \quad (4)$$

ただし  $K$  は周波数  $\omega_o$  における発振器の受動回路の位相勾配から定まり、回路の  $Q$ 、周波数離調度  $\delta$  を用いて

$$K(\omega_o) = \frac{\partial}{\partial \omega} 2 \delta Q \big|_{\omega = \omega_o}$$

である。

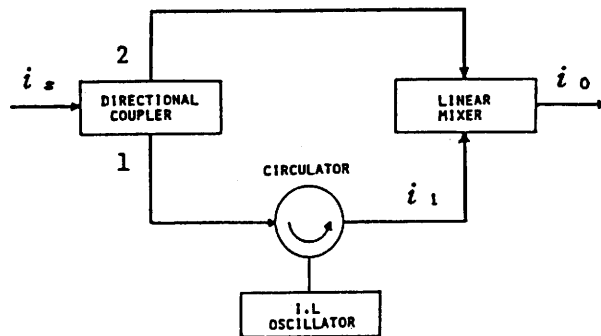


図 1 FM 受信機の回路構成

図1の回路より明らかなように位相同期発振器はミキサの局部発振器として見ることもでき、したがってミキサ出力は、式(3)の同期定常状態を仮定すると

$$I_1 I_s \sin \varphi = I_1 I_s / B (\dot{\theta}_s + \omega_s - \omega_0) \quad (5)$$

である。同期定常状態の振幅条件式により同期帯域幅Bは $I_1$ 、 $I_s$ に依存し、つぎのようになる(付録A参照)。

$$i_0 = \eta P_{0, \text{free}} \left( 1 + \frac{Q_L}{\omega_0} B \sqrt{1 - \left( \frac{\omega_s - \omega_0}{B} \right)^2} \right) \cdot (\dot{\theta}_s + \omega_s - \omega_0) \quad (6)$$

$$|\omega_s - \omega_0| < B$$

ここに $\eta$ はミキサの周波数変換係数である。 $P_{0, \text{free}}$ は発振器の自由発振出力電力、 $Q_L$ は発振器の内部Qと外部Qからなる負荷Qである。 $\omega_s = \omega_0$ のとき式(6)は

$$\begin{aligned} i_0 &= \eta P_{0, \text{free}} \left( 1 + \frac{Q_L}{\omega_0} B \right) \dot{\theta}_s \\ &\simeq \eta P_{0, \text{free}} \cdot \frac{Q_L}{\omega_0} B \cdot \dot{\theta}_s \end{aligned} \quad (6)'$$

であるから $i_0$ は $\dot{\theta}_s$ に比例し、周波数復調が実現できることがわかる。また検波出力値は $Q_L$ とBにそれぞれ比例し、より大きな $Q_L \times B$ が望ましいことがわかる。

以上は同期定常状態を仮定したが、変調信号 $\theta_s(t)$ を

$$\theta_s(t) = m \cdot \sin \Omega t$$

とおき出力信号 $i_0$ を調べよう。

$$\frac{\alpha \varphi}{\alpha \tau} = p \cdot m \cos p \tau + \delta - \frac{B}{\omega_0} \sin \varphi \quad (7)$$

$$p = \frac{\Omega}{\omega_s}, \quad \delta = \frac{\omega_s - \omega_0}{\omega_s}, \quad \tau = \omega_0 t$$

ここに $m$ は変調指数、 $\Omega$ は変調角周波数である。反復法により $p$ の第3高調波成分まで求めると次のようになる<sup>(6)</sup>。

$$\sin \varphi = m \frac{\Omega}{B} (A_1 \cos(p \tau - \theta_1) + A_3 \sin(3p \cdot \tau + \theta_3)) \quad (8)$$

$$A_1 = \frac{\sqrt{\{1 + (1 - k_1)\alpha^2\}^2 + (\alpha k_1)^2}}{1 + \alpha^2}, \quad A_3 = \frac{k_3 \alpha}{\sqrt{1 + 9\alpha^2}}$$

$$k_1 = 1 + \frac{1}{8} (\alpha \cdot m)^2 + \frac{3}{64} (\alpha \cdot m)^4 + \dots$$

$$k_3 = \frac{1}{8} (\alpha \cdot m)^2 \left( 1 + \frac{3}{16} (\alpha \cdot m)^2 + \dots \right)$$

$$\alpha = p \frac{\omega_0}{B}, \quad \theta_1 = \tan^{-1} \frac{\alpha k_1}{1 + (1 - k_1)\alpha^2}, \quad \theta_3 = \tan^{-1} 3\alpha$$

$$i_0 = \eta P_{0, \text{free}} \left(1 + \frac{Q_i}{\omega_0} B\right) \cdot m \Omega (A_1 \cos(pt - \theta_1) + A_3 \sin(3pt - \theta_3)) \quad (9)$$

検波出力は変調指数と変調周波数の積に比例している。また基本波と第3高調波の歪みは、 $\Omega$ の最大値としてBにとると、すなわち $\Omega = B$ のとき、 $\alpha \approx 1$ と近似でき

$$\frac{A_3}{A_1} \approx \frac{m^2}{8\sqrt{5}}$$

として見積られる。第3高調波歪はほぼ変調指数の2乗に比例して増大する。

つぎに式(3)より過渡的位相の同期応答について調べる。 $|\omega_s - \omega_0| < B$ のとき、位相 $\varphi$ は $t = t_0$ の初期位相 $\sin \varphi_0 = (\omega_s - \omega_0)/B$ 値から定常位相に収束する。

$$\frac{\omega_s - \omega_0}{B} \cdot \tan \frac{\varphi}{2} = 1 + \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_s - \omega_0}{B}\right)^2} \tanh \frac{B(t - t_0)}{2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_s - \omega_0}{B}\right)^2} \quad (10)$$

初期値から定常位相に引き込まれる同期時間はほぼ $1/B$ に支配される。すなわち同期帯域幅 $B$ が大きいほど安定な位相に引き込まれる応答時間が小さい。同期帯域幅は位相同期の基本的特性を支配する重要なパラメータであることが理解できる。

位相同期を実現するものとして複数個の共振回路を有する同期多重モード発振器がある。基本波に第3高調波(第2高調波でもよい)が相互同期(内部共振と呼ぶこともある)状態にあるとき、基本波の位相同期は2階の微分方程式で記述され、いわゆる2次の位相同期ループの表現式に一致することが示される。(付録B参照)

### 3. 同期安定と位相引込み

位相同期発振器の同期安定性は、基本的にはVan der Poleの微分方程式に周期的強制力を加えたときの周期解の安定判別式から求まる。これは付録の式(A・2)～(A・5)を用いることによって得られ、一般に図2のように描ける。図2において縦軸は自由発振振幅値による規格化振幅値であり、横軸は離調度である。また $P_i$ は規格化注入信号レベルを表わし、出力振幅値の共振曲線群が描かれている。図中の黒丸は注入信号レベルが指定されたときの最大離調度を示すもので、最大同期帯域幅として定義される。

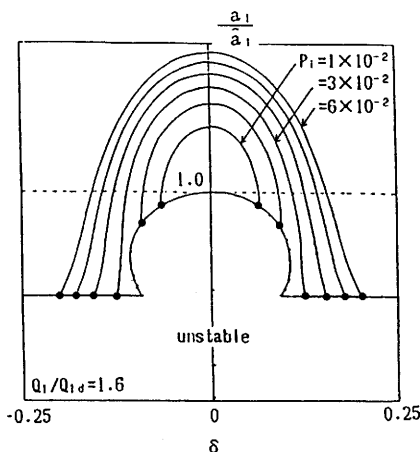


図2 共振曲線と同期安定領域

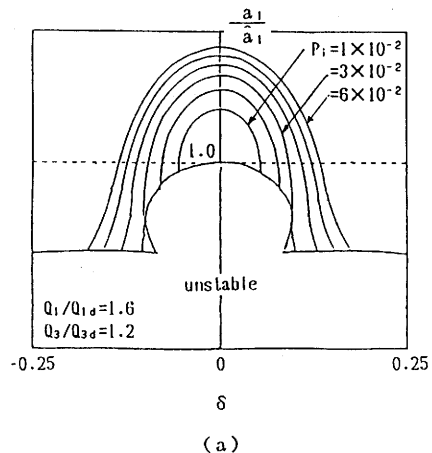


図3 2重モード発振器の同期安定領域

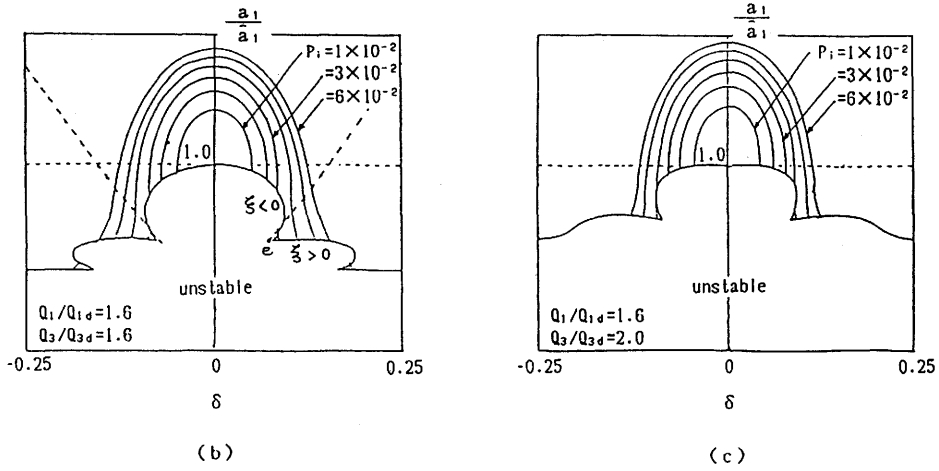


図3 2重モード発振器の同期安定領域

2重モード同期発振器の同期帯域幅が図3に図示されている。図中の $Q_1$ 、 $Q_3$ 及び $Q_{1d}$ 、 $Q_{3d}$ はそれぞれ基本波、第3高調波に対する外部Q、及び内部Qである。図2と図3を比較すると $Q_1/Q_{1d} < Q_3/Q_{3d}$ の場合2重モード同期発振器の特徴が現れている。この両者の比較を行うため式(A・2)をつぎのようにおく。

$$G_1 = -\gamma_1 + 3K \cdot a_1^2 - \frac{F}{a_1} \cos \varphi + \xi \quad (11)$$

ここに

$$\xi = 3Ka_3(a_3 + a_1 \cos \phi_{13})$$

$\xi = 0$ は単一モード発振器を記述する方程式であるので $\xi$ は2重モード相互同期の結合調波成分を表す。図3の安定領域の境界線上の動作点は最大同期帯域幅であるので、この動作点における $\xi$ の正、負が調べられる。図3に記されているように

$$\frac{Q_1}{Q_{1d}} > \frac{Q_3}{Q_{3d}} > 1 \text{ のとき } \xi < 0 \quad (12)$$

一方

$$1 < \frac{Q_1}{Q_{1d}} \leq \frac{Q_3}{Q_{3d}} \text{ のとき } \xi < 0 \text{ と } \xi > 0 \quad (13)$$

の両方が存在する。

$\xi < 0$ は第3高調波成分から見てエネルギーの発生を意味し、 $\xi > 0$ のとき損失分として作用するので第3高調波成分から見たときエネルギーが消費されることを意味する。これは $1/Q_n$ を単位時間に失う損失エネルギー、 $1/Q_{nd}$ を発生エネルギーとすると式(13)は

$$\frac{\frac{1}{Q_{3d}} - \frac{1}{Q_3}}{\frac{1}{Q_3}} \geq \frac{\frac{1}{Q_{1d}} - \frac{1}{Q_1}}{\frac{1}{Q_1}} > 0 \quad (14)$$

と書ける。外部に取り出し得るエネルギーの損失の割合は第3高調波成分において大きいことを示している。このように式(14)が成立するとき図3(b)に示したように $\xi > 0$ と $\xi < 0$ の状態を含む同期安定領域が形成され、基本波と第3高調波のエネルギー授受が生ずる。

つぎに位相引込み過程について調べよう。図4は位相面軌跡を表わしている。周波数誤差 $\phi_i$ の大きさによってサイクルスリップしながら平衡点に引き込まれるうずまき点と結節点とに分れる。周波数誤差の初期値として図3の離調度を与えると、結節点とうずまき点をつくり出す引き込み過程の分岐線は図3に示されているような一点鎖線でプロットされる。単一モード同期発振器の場合この分岐点は特性方程式が

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

$$p = 2a_1^2 - \hat{a}_1^2 \quad q = \frac{1}{4}(3a_1^2 - \hat{a}_1^2)(a_1^2 - \hat{a}_1^2) + \delta^2$$

であるから

$$p^2 - 4q = 0 \quad (15)$$

を満足し、 $p^2 - 4q > 0$ のとき安定な結節点、 $p^2 - 4q < 0$ のときサイクルスリップしながらうずまき状に引き込みが生ずる。式(15)は

$$\frac{a_1}{\hat{a}_1} = \pm \frac{\delta}{\hat{a}_1} \quad (16)$$

として与えられる。図3(b)の分岐線は式(16)を満足しており、安定領域を分離する点eを通る。点eは $\xi = 0$ であり、エネルギー授受の平衡点を通る直線によって分離され、引込み時間に影響を及ぼすことは興味ある。

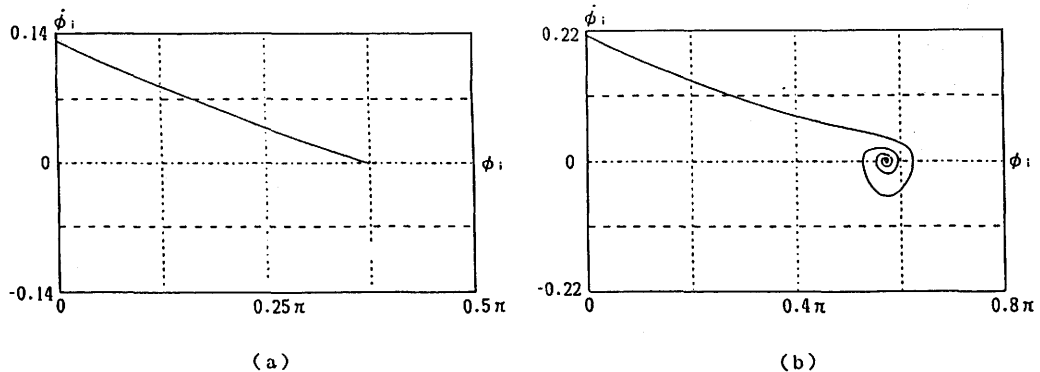


図4 位相面軌跡

#### 4. 最大動作同期帯域幅と等価雑音帯域幅

任意の注入信号レベルにおいて離調に対する出力振幅の定常特性は図3(a)のように描ける。このとき同期安定領域の特性曲線と交わる点はその注入信号レベルに対する最大同期帯域幅である。この最大同期帯域幅 $B_{\max}$ は図5より明かなように注入信号レベル $P_i$ とともに増大する。一方 $P_i$ が非常に小さい小信号注入においては振幅は一定として扱うことができ、位相方程式(A・3), (A・5)から同期帯域幅が決定される。いまこの同期帯域幅を $B_0$ とおく。 $B_{\max}$ は2重モード同期発振器固有の性能指数と考えられ、 $B_0$ は位相引込み作用を評価するときの動作同期帯域幅として扱える。さてこの動作同期帯域幅のとり得る最大値は、位相引込み過程の条件を考慮すると図3(b)にプロットされている位相引込み過程の分岐線との交点として採用できる。この最大動作同期帯域幅を $B_L$ として定義する。 $B_{\max}$ 対 $B_0$ の特性を図6に、 $B_{\max}$ 対 $B_L$ 特性を図7に示す。 $B_L$ はほぼ $B_{\max}$ に比例して増大する。また図8にサイクルスリップする $\delta = 0.6 B_{\max}$ の同期応答時間 $T$ とサイクルスリップしない $\delta = 0.5 B_{\max}$ の同期応答時間の比較を示す。

等価雑音帯域幅について導出しよう。微小雑音仮定では出力信号応答は位相ゆらぎとして扱われ、つぎの基礎式が得られる。(付録A参照)

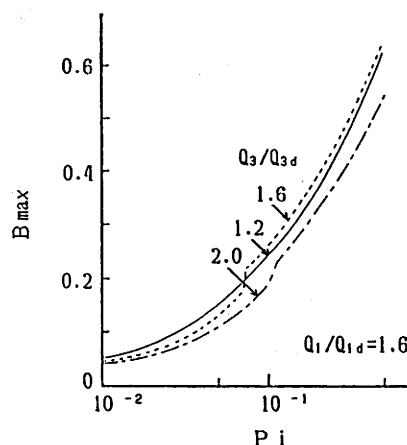


図5 注入電力に対する最大同期帯域幅

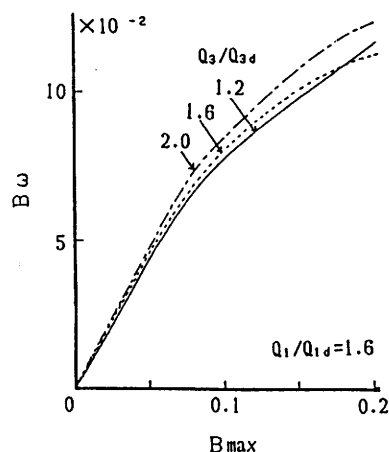


図6 動作同期帯域幅

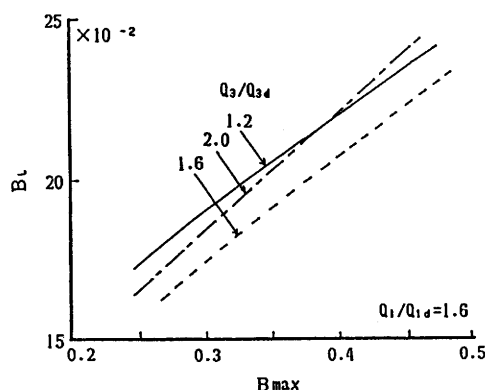


図7 最大動作同期帯域幅

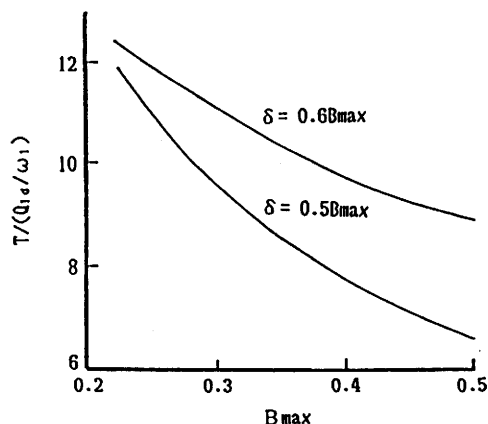


図8 同期時間

$$\dot{\varphi} = \omega_i - \omega_o - \frac{B_{3\omega}}{3} \left(1 - \frac{B_o}{B_{\omega}}\right) \sin \phi_{13} - B_o \sin \varphi - n(t) \quad (17)$$

$$\dot{\phi}_{13} = B_o \frac{B_{3\omega}}{B_{\omega}} \sin \phi_{13} - 3 B_o \sin \varphi - 3 n(t) \quad (18)$$

ここに $B_{3\omega}$ は第3高調波成分に対する同期帯域幅、 $B_o$ は単一モード同期発振器の同期帯域幅である。 $n(t)$ は通信路に付加される白色雑音である。式(17), (18)より雑音 $n(t)$ による位相ゆらぎのスペクトル $\Delta \varphi(f)$ ,  $\Delta \phi_{13}(f)$ を求める。このとき等価雑音帯域幅 $B_n$ を

$$B_n = \frac{1}{|\Delta \varphi(o)|^2} \int_{-\infty}^{\infty} |\Delta \varphi(f)|^2 df \quad (19)$$

として定義する。式(17), (18)より

$$B_n = \frac{B_{\omega}(B_o \cos \varphi - B_{3\omega} \cos \phi_{13}) \cos \varphi}{B_{\omega} \cos \varphi - B_{3\omega} \cos \phi_{13}} \quad (20)$$

式(17)より $\omega_i = \omega_o$ のとき $\cos \varphi = 1$ ,  $\cos \phi_{13} = -1$ であり $B_o > B_{\omega}$ であるから式(20)より

$$B_{\omega} < B_n < B_o \quad (21)$$

が成立する。 $B_o$ は単一モード同期発振器の同期帯域幅であるが、一次位相ループ回路のループゲインでもある。したがって $B_n/B_o$ は2重モード同期発振器としての位相雑音改善度の効果を表わしている。図9に $B_{\max}$ に対する $B_n/B_o$ の値が示されている。 $B_{\max}$ が大きい値において改善効果が認められる。

## 5 FM検波特性

2重モード同期発振器のFM受信機の検波特性を表わす。同期定常状態が

$$\sin \varphi_o = \frac{\omega_o}{B_{\omega}} (p \cdot m \cos p \tau + \delta)$$

$$\sin \phi_{13} = \frac{3\omega_o}{B_{3\omega}} p \cdot m \cos p \tau$$

であることを考慮すると、式(8)に対応して

$$\sin \varphi = B \cdot m \left[ \frac{\{(1 + (1 - bk_1)\beta^2)^2 + (bk_1\beta)^2\}^{1/2}}{1 + \beta^2} \cdot \cos(p\tau - \Psi_1) + \frac{bk_1\beta}{1 + 9\beta^2} \times \sin(3p\tau - \Psi_3) \right] \quad (22)$$

ここに

$$b = 1 + \frac{B_{\omega}}{B_{3\omega}} \left(1 - \frac{B_{\omega}}{B_o}\right), \quad \beta = p \frac{\omega_o}{B_{\omega}}, \quad \Psi_1 = \tan^{-1} \frac{bk_1\beta}{1 + (1 - bk_1)\beta^2}$$

$$\Psi_3 = \tan^{-1} 3\beta$$

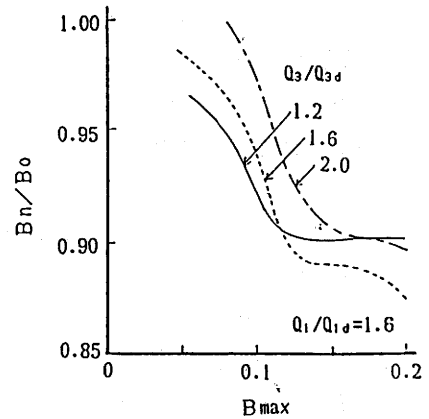


図9 雑音改善効果



$B_w=B_0$  のとき、式(22)は式(18)に一致し単一モード同期となる。一般に  $b > 1$  であるので、式(22)の第3高調波の振幅は式(18)の場合に比べて大きい。式(22)の計算結果を図10に示す。基本波振幅は  $p=10^{-1}$  においてほぼ  $m/\sqrt{2}$  の大きさとして見積ることができる。式(22)は式(A・1)～(A・4)により直接数値計算した値とよく一致している。また式(22)から求まる基本波と第3高調波の電力比を図11にプロットされている。

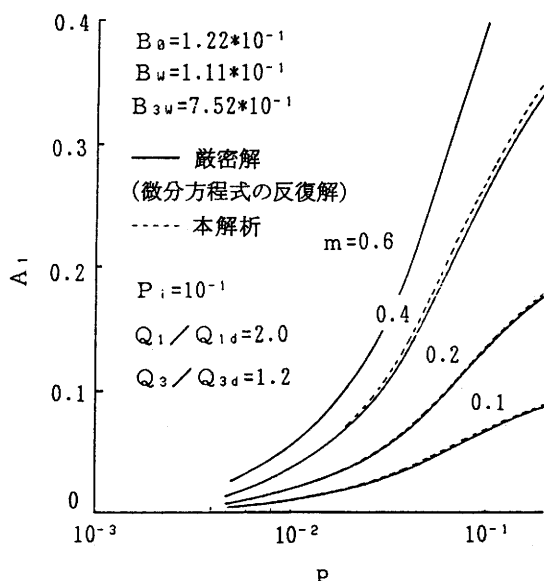


図10 基本波出力振幅

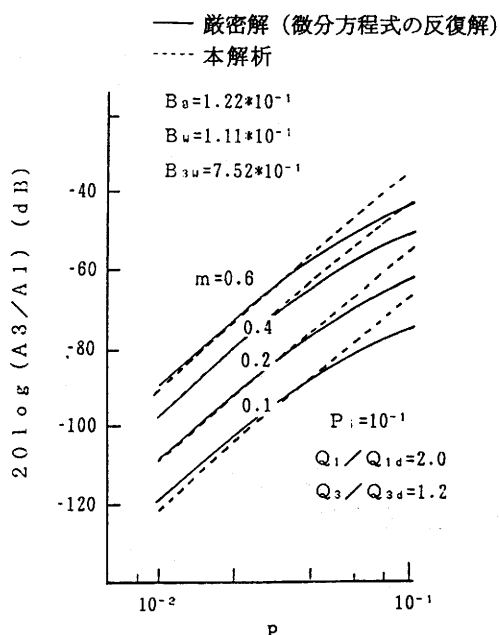


図11 第3高調波の基本波に対する歪率

## 6. 実験結果

FM受信機の基礎特性の確認を得るため簡単なモデル実験を行った。図12の実験回路は基本波周波数3.5MHz, 第3高調波10.5MHzの2重モード同期発振器から構成されている。変調周波数 $\Omega$ に対する検波出力 $\phi$ の基本波振幅値の測定結果を図13に, また同期帯域幅に対する特性を図14に示す。いずれも解析で得られた基礎特性に定性的に一致するものである。つぎに雑音を印加し, 同期出力信号に含まれる位相ゆらぎに基づく雑音電力を測定した。入力雑音レベルおよび出力雑音の測定手順は文献(4)の方法に準じて行っている。図15に雑音改善度 $B_n/B_0$ の特性がプロットされている。実験的にも雑音改善効果が認められる。

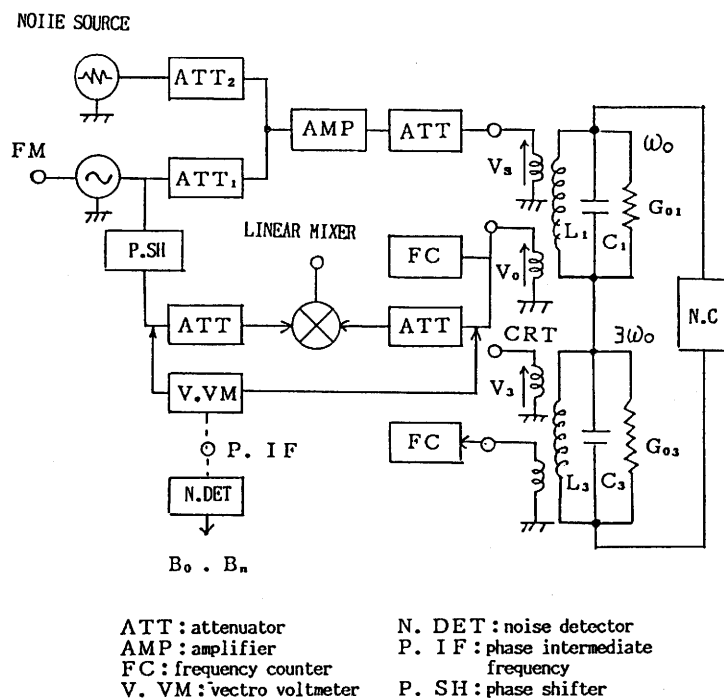


図12 実験回路

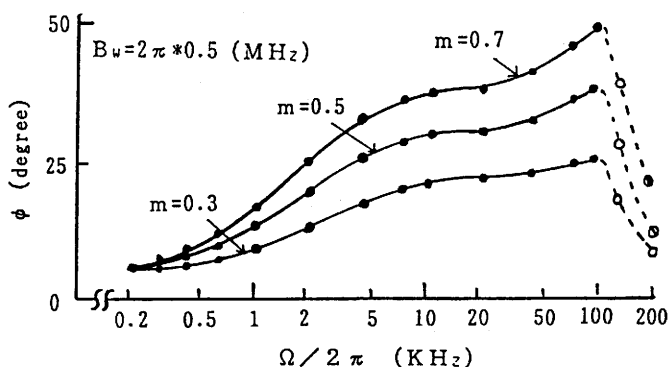


図13 検波出力の変調周波数依存性

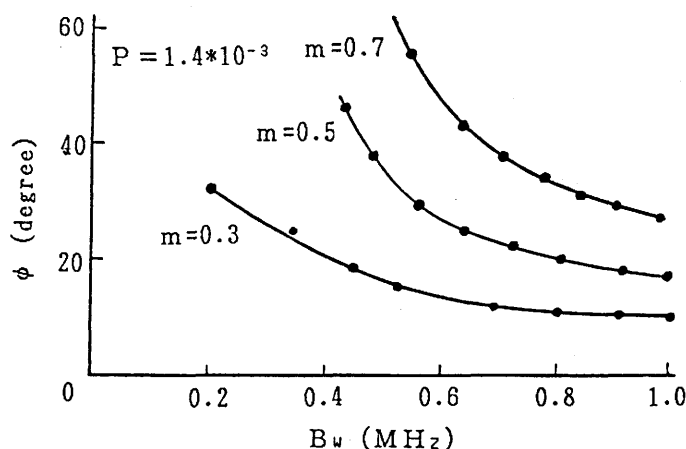


図14 検波出力の同期帯域幅依存性

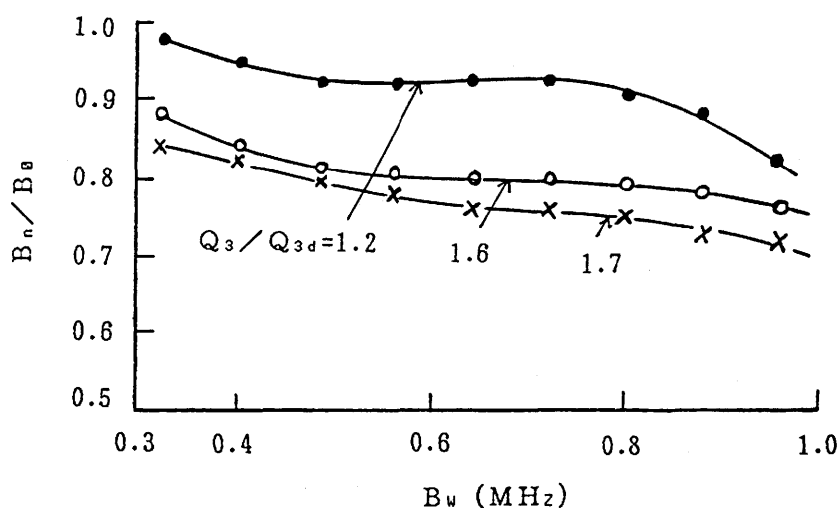


図15 雑音軽減効果の測定値

## 7. む す び

FM受信機を2重モード同期位相回路から構成する方法について述べ、従来の回路構成と比較して次の点で優れていることを明らかにした。

- (1) 正弦波FM変調波信号の検出は変調信号の基本波電力と第3高調波電力比が約-40dB以下で実現できる。
- (2) 同期帯域幅当りの位相ゆらぎに基づく雑音電力は従来の方法に比し70%程度軽減される。
- (3) ブルインレンジ、同期時間などの速やかな過渡応答を実現する指標として最大動作同期帯域幅を新しく定義した。
- (4) 等価雑音帯域幅を最大同期帯域幅、動作同期帯域幅との関連において新しい解釈を加えた。

## 参 考 文 献

- 1) C.L.Ruthroff, : "Injection-locked-oscillator FM receiver analysis,"  
Bell Syst. Tech. J.47 No.3 pp.1653-1661, 1968
- 2) B.Glance, : "Digital phase demodulator,"  
Bell Syst. Tech. J.50 No.3 pp.933-948, 1971
- 3) M.Eisenberg, : "Almost-coherent detection of phase-shift-Keyed signals using an injection Locked Oscillator," Bell Syst. Tech. J.51 No.8 pp.1867-1880, 1972
- 4) 梅田, 中野, 白神 : "高調波 2 重モード発振器の FSK-ASK 変換特性,"  
信学論J.69-B pp.1637-1646 (昭61)
- 5) K.Kurokawa, : "Injection locking of microwave solid state oscillators,"  
Proc.IEEE, Vol.61 No.10 pp.1386-1409(1973)
- 6) 梅田, 寺島, 白神 : "高調波同期 2 重モード発振器による FM 受信機,"  
電子情報通信学会. 非線形問題研究会資料, NLP86-71 pp.7-12 (1987)
- 7) 梅田, 寺島 : "大信号注入 2 重モード発振器の同期特性,"  
電子情報通信学会. 非線形問題研究会資料, NLP87-75 pp11-18 (1988)

## 付 録

## A. 基礎方程式の導出

外部同期信号, 付加雑音が存在する場合の 2 重モード同期発振器の応答は, 保存系を手掛りとしハミルトニアンを考え方に基づいて方程式の導出が行える。図 A・1 を参照しハミルトン関数は

$$H = \omega_1 \alpha_1 \alpha_1^* + \omega_3 \alpha_3 \alpha_3^* + K(\alpha_1^3 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_3^3)$$

ここに

$$\alpha_1 = (2\omega_1 L_1)^{1/2} I_1 - j(2\omega_1 C_1)^{1/2} q_1$$

$$\alpha_3 = (2\omega_3 L_3)^{1/2} I_3 - j(2\omega_3 C_3)^{1/2} q_3$$

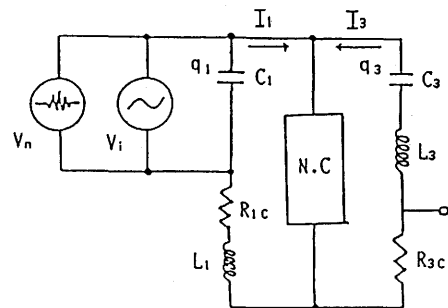
$$\omega_n = (L_n C_n)^{1/2} \quad n = 1, 3$$

$$K = 2\omega_3 \gamma_3 (2L_1 L_3)^{1/2}$$

正準運動方程式は

$$\frac{d\alpha_k}{dt} = j \frac{dH}{d\alpha_k^*} \quad k = 1, 3$$

抵抗による損失分, 外部強制項, 付加雑音項を付け加えると



A・1 2 重モード同期発振器の回路モデル

$$\left. \begin{aligned} \dot{\alpha}_1 &= j\omega_1 \alpha_1 + 3jK\alpha_1^2 \alpha_3 - \gamma_1 \alpha_1 - 3K(\alpha_1^2 \alpha_1^* + 2\alpha_1 \alpha_3 \alpha_3^*) \\ &\quad - jFe^{j\omega_s t} - jn(t) \\ \dot{\alpha}_3 &= j\omega_3 \alpha_3 + jK\alpha_1^3 - \gamma_3 \alpha_3 - K(\alpha_3^2 \alpha_3^* + 2\alpha_1 \alpha_3 \alpha_1^*) \end{aligned} \right\} \quad (A \cdot 1)$$

ここに  $\gamma_n (n=1, 3)$  は回路の全抵抗,  $F$  は強制力,  $n(t)$  は雑音成分を表す。いま複素振幅  $A_1, A_3$  を

$$A_1 = -j a_1 e^{j\theta_1}$$

$$A_3 = a_3 e^{j\theta_3}$$

とおき

$$\alpha_1 = A_1 e^{j\omega_1 t}$$

$$\alpha_3 = A_3 e^{j\omega_3 t}$$

と表現する。これらを用いて式(A・1)はつぎのように書かれる。

$$\dot{a}_1 = -\{\gamma_1 + 3K(a_1^2 + 2a_3^2)\}a_1 - 3Ka_1^2 a_3 \cos \phi_{13} + F \cos \varphi + n(t) \cos(\omega_s t + \theta_1) \quad (A \cdot 2)$$

$$a_1 \dot{\theta}_1 = -(\omega_s - \omega_1)a_1 + 3Ka_1^2 a_3 \sin \phi_{13} - F \sin \varphi + n(t) \sin(\omega_s t + \theta_1) \quad (A \cdot 3)$$

$$\dot{a}_3 = -\{\gamma_3 + K(a_3^2 + 2a_1^2)\}a_3 - Ka_1^3 \cos \phi_{13} \quad (A \cdot 4)$$

$$a_3 \dot{\theta}_3 = -(3\omega_s - \omega_3)a_3 + Ka_1^3 \sin \phi_{13} \quad (A \cdot 5)$$

ここに  $\varphi = \theta_s - \theta_1$ ,  $\phi_{13} = 3\theta_1 - \theta_3$ ,  $\omega_3/3 = \omega_1 \simeq \omega_0$

単一モード同期定常出力の表現式を以下導出する。式(A・2)において $a_1 = 0$ の同期定常状態を考え $a_3 = 0$ とおく。このときつぎの式が得られる。

$$\frac{P_i}{P_0} = \left(1 - \frac{1}{Q_{1d}}\right)^2 \left(1 - \frac{P_0}{P_{0,free}}\right)^2 + (2\delta_1 Q_1)^2 \quad (A \cdot 6)$$

ここに $P_i$ は注入信号電力、 $P_0$ は同期出力電力であり、また $Q_1$ 、 $Q_{1d}$ はそれぞれ外部Qと内部Qを表す。また $P_{0,free}$ は $P_i = 0$ における出力電力値である。同期帯域幅Bを式(4)の定義式を用いると

$$B = \frac{\omega_0}{Q_1} \sqrt{\frac{P_i}{P_0}}$$

であるから式(A・6)はつぎのように書ける。

$$P_0 = P_{0,free} \left(1 + Q_L \frac{B}{\omega_0} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_s - \omega_0}{B}\right)^2}\right) \quad (A \cdot 7)$$

ここに

$$\frac{1}{Q_L} = \frac{1}{Q_1} + \frac{1}{Q_{1d}} \quad \text{である。}$$

#### B. 不完全積分型位相同期ループの基礎式の導出

同期定常状態を考えると式(A・3)、式(A・4)において $\phi_{13} = \pi \pmod{2\pi}$ である。いま $B_s \gg \theta_s$ なる条件を用い、 $\phi_{13} = \pi + \Delta\phi$ に対し、 $\sin \phi_{13} \simeq -\Delta\phi$ と近似する。このとき式(A・3)、(A・4)はつぎのように表わせる。

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + (\cos \varphi + \frac{B_{3w}}{B_s}) \frac{d\varphi}{d\tau} + B_{3w} \sin \varphi = \frac{d^2\theta_s}{d\tau^2} + \frac{B_{3w}}{B_s} + \frac{d\theta_s}{d\tau} + B_{3w} \frac{\omega_s - \omega_0}{B_s} \quad (A \cdot 8)$$

$\tau = B_0 t$ ,  $B_s$ ,  $B_{3w}$ は基本波、第3高調波に対する動作同期帯域幅であり、 $B_0$ は単一モード同期に対する同期帯域幅である。式(A・8)は2次位相同期ループの同期方程式に一致する。

